22/5/2017

Έστω G: ομάδα και $x, y \in G$ τότε ορίζουμε

$$x \sim y \iff \exists g \in G : g \cdot x \cdot g^{-1} = y$$

Η σχέση "$\sim$" καλείται σχέση συζυγίας στην ομάδα G, τα στοιχεία x, y όπως παραπάνω καλούνται συζυγή και η παραπάνω σχέση συζυγίας είναι ισοδυναμίας

Συζυγή στοιχεία σε μια ομάδα έχουν πολλές κοινές ιδιότητες π.χ έχουν την ίδια τάξη: $o(x) = o(g \cdot x \cdot g^{-1})$

• $x \sim x$ διότι: $e \cdot x \cdot e^{-1} = x$

• Αν $x \sim y \Rightarrow g \circ x \circ g^{-1} = y \Rightarrow x = g^{-1} \circ y \circ g = g^{-1} \cdot y \cdot (g^{-1})^{-1}$

$\Rightarrow y \sim x$

• Αν $x \sim y$ και $y \sim z$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$\exists g \in G: g \cdot x \cdot g^{-1} = y \ (1)$ $\exists h \in G: h \cdot y \cdot h^{-1} = z \ (2)$

$(1) \& (2) \Rightarrow \quad z = h \cdot g \cdot x \cdot g^{-1} \cdot h^{-1} = h \cdot g \cdot x \cdot (h \cdot g)^{-1}$

$\Rightarrow x \sim z$

Οι κλάσεις ισοδυναμίας της G ως προς τη σχέση συζυγίας "$\sim$" καλούνται κλάσεις συζυγίας. Τότε

$\forall x \in G \quad [x]_{\sim} = \{y \in G \mid x \sim y\} = \{y \in G \mid \exists g \in G : g \cdot x \cdot g^{-1} = y\}$

$= \{g \cdot x \cdot g^{-1} \in G \mid g \in G\}$

Πρόταση: Αν $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ είναι ένας κύκλος μήκους k στην S_n. Τότε $\forall \sigma \in S_n$ η μετάθεση

$$\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_k)) \quad (*)$$

Απόδειξη: Για τυχόν $a \in \{1, 2, \ldots, n\}$ για να ισχύει η $(*)$ θα πρέπει: $(\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_k)\sigma^{-1})(a) = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_k))(a)$

(1) Αν $a \in \{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_k)\}$ τότε:

$(\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_k)\sigma^{-1})(\sigma(i_1)) = \sigma(i_1, i_2, \ldots, i_k)(i_1) = \sigma(i_2)$

$(\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_k)\sigma^{-1})\sigma(i_2) = \sigma(i_1, i_2, \ldots, i_k)(i_2) = \sigma(i_3)$

$\vdots$

$(\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_k)\sigma^{-1})\sigma(i_k) = \sigma(i_1, i_2, \ldots, i_k)(i_k) = \sigma(i_1)$

Άρα, οι μεταθέσεις $\sigma(i_1, i_2, \ldots i_k)$ και $(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_k))$ παίρνουν τις ίδιες τιμές στα $\{\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_k)\}$

ii) Αν $a \neq \sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_k) \Rightarrow a \neq \sigma(i_j), \forall j = 1, 2, \ldots, k$

$\Rightarrow \sigma^{-1}(a) \neq i_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k$

Τότε ο κύκλος $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ όταν εφαρμοστεί στο $\sigma^{-1}(a) \neq i_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k$ θα το αφήσει σταθερό.

Άρα, $(\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_k)\sigma^{-1})(a) = \sigma(i_1, i_2, \ldots, i_k)\sigma^{-1}(a)$

$= \sigma(i_1, i_2, \ldots)(\sigma^{-1}(a)) = a$. Παρόμοια

$(\sigma(i_1), \sigma(i_2) \ldots, \sigma(i_k))(a) = a$ διότι $a \neq \sigma(i_j), \; j = 1, 2, \ldots, k$

Από (1) και (2) $\Rightarrow \forall a \in G : (\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_k)\sigma^{-1})(a)$

$= (\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_k))(a)$

$\Rightarrow \sigma(i_1, i_2, \ldots, i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_k))$

Πρόταση: Έστω $\sigma=(i_1, i_2, \dots, i_k)$ και $\tau=(j_1, j_2, \dots, j_l)$ κύκλοι στην S_n. Τότε οι σ, τ: συζυγή στοιχεία της S_n $\Leftrightarrow k=l$

Απόδειξη:

"$\Rightarrow$" Έστω ότι οι κύκλοι σ, τ είναι συζυγείς

$\Rightarrow \exists \rho \in S_n : \rho \cdot \sigma \cdot \rho^{-1} = \tau \Rightarrow o(\sigma)=o(\tau) \Rightarrow k=l$

"$\Leftarrow$" Έστω $k=l$. Ζητάμε $\rho \in S_n$: $\rho(i_1, i_2, \dots, i_k)\rho^{-1} = (j_1 j_2 \dots j_k)$

$\Rightarrow (\rho(i_1), \rho(i_2) \dots, \rho(i_k)) = (j_1, j_2, \dots, j_k)$

Ορίζουμε μετάθεση $\rho \in S_n$ ως εξής:

$\rho(i_1)=j_1$
$\rho(i_2)=j_2$
$\vdots$
$\rho(i_k)=j_k$

Τότε τα σύνολα $\{1,2,\dots,n\}\setminus\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ και $\{1,2,\dots,n\}\setminus\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Άρα, υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση $\rho' : \{1,2,\dots,n\}\setminus\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \to \{1,\dots,n\}\setminus\{j_1,\dots,j_k\}$

και τότε ορίζουμε $\rho(a)=\rho'(a)$, $\forall a \in \{1,2,\dots n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$

Άρα $\rho \in S_n$ και εκ κατασκευής $\rho \circ \sigma \cdot \rho^{-1} = \tau$

Έστω $\sigma \in S_n$ μια τυχούσα μετάθεση και

έστω $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_k$ η ανάλυση σε γινόμενο

ξένων κύκλων, η οποία είναι μοναδική.

Ζητάμε να περιγράψουμε την $\rho \sigma \rho^{-1}$

Τότε $\rho \circ \sigma \circ \rho^{-1} = \rho \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_k \circ \rho^{-1}$

$$= \rho \sigma_1 \rho^{-1} \rho \sigma_2 \rho^{-1} \cdot \rho \sigma_3 \rho^{-1} \rho \dots \rho \sigma_k \cdot \rho^{-1}$$

$$= (\rho \sigma_1 \rho^{-1})(\rho \sigma_2 \rho^{-1})(\rho \sigma_3 \rho^{-1}) \dots (\rho \cdot \sigma_k \cdot \rho^{-1})$$

Ορισμός: Δυο μεταθέσεις σ, τ έχουν τον ίδιο

κυκλικό τύπο αν-ν: αν $\left.\begin{array}{l} \sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k \\ \tau = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_\lambda \end{array}\right\}$ αναλύσεις σε γινόμενα ξένων κύκλων

τότε: (i) $k = \lambda$ και $o(\sigma_i) = o(\tau_i)$ $\forall i = 1, 2, \dots, k$

Θεώρημα: Δυο μεταθέσεις $\sigma, \tau \in S_n$ είναι συζυγείς αν-ν έχουν τον ίδιο κυκλικό τύπο

Απόδειξη: "$\Rightarrow$" Αν σ, τ είναι συζυγείς, τότε $\exists \rho \in S_n$: $\rho \circ \sigma \circ \rho^{-1} = \tau$. Τότε αν $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k$ είναι η ανάλυση της σ σε γινόμενο ξένων κύκλων, τότε:

$\tau = (\rho \sigma_1 \rho^{-1}) \cdot (\rho \sigma_2 \rho^{-1}) \dots (\rho \sigma_k \rho^{-1})$ η ανάλυση της τ σε γινόμενο ξένων κύκλων. Άρα, σ, τ έχουν τον ίδιο κυκλικό τύπο

"$\Leftarrow$" Υποθέτουμε ότι σ, τ έχουν τον ίδιο κυκλικό τύπο. Τότε: $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k)(j_1, j_2, \dots, j_\lambda) \dots (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r)$

: η ανάλυση της σ σε γινόμενο ξένων κύκλων

τότε $\tau = (i_1', i_2', \dots, i_k')(j_1', j_2', \dots, j_\lambda') \dots (\mu_1' \mu_2' \dots \mu_r')$

: η ανάλυση της σ σε γινόμενο ξένων κύκλων

Ορίζουμε $\rho \in S_n$ ως εξής: $\rho(i_1) = i_1', \dots, \rho(i_k) = i_k'$

$\rho(j_1) = j_1', \dots, \rho(j_\lambda) = j_\lambda' \dots \rho(\mu_1) = \mu_1', \dots, \rho(\mu_r) = \mu_r'$

Τότε ρ έτσι και εκ κατασκευής $\rho\sigma\rho^{-1}=\tau$

Άρα, σ,τ : συζυγείς.

Παράδειγμα :

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\10&11&6&7&2&3&5&12&9&8&4&1\end{pmatrix}$$

$$\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\3&11&5&4&1&9&2&7&6&12&8&10\end{pmatrix}$$

$$\rho=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\5&7&11&9&12&3&2&6&1&10&8&4\end{pmatrix}$$

$\sigma = (1\ 10\ 8\ 12) \circ (2\ 11\ 4\ 7\ 5) \circ (3\ 6) \circ (9)$

$= (2\ 11\ 4\ 7\ 5) \circ (1\ 10\ 8\ 12) \circ (3\ 6) \circ (9)$

$\tau = (3\ 5) \circ (2\ 11\ 8\ 7) \circ (4) \circ (6\ 9) \circ (10\ 12)$

Οι σ, τ δεν είναι συζυγείς αφού δεν έχουν τον ίδιο τύπο άρα δεν είναι συζυγείς

$\rho = (1\ 5\ 12\ 4\ 9) \circ (2\ 7) \circ (3\ 11\ 8\ 6) \circ (10)$

$= (1\ 5\ 12\ 4\ 9) \circ (3\ 11\ 8\ 6) \circ (2\ 7) \circ (10)$

Οι σ, ρ έχουν τον ίδιο κυκλικό τύπο και άρα είναι συζυγείς $\Rightarrow \exists\, \xi \in S_{12} : \xi \circ \sigma \circ \xi^{-1} = \rho$

ξ:

$\xi(2) = 1$, $\xi(11) = 5$, $\xi(4) = 12$, $\xi(7) = 4$, $\xi(5) = 9$

$\xi(1) = 3$, $\xi(10) = 11$, $\xi(8) = 8$, $\xi(12) = 6$

$\xi(3) = 2$, $\xi(6) = 7$

$\xi(9) = 10$

Εφαρμογή: Ποιες είναι οι δυνατές τάξεις στοιχείων στην S_4;

Αν $\sigma \in S_4$ τότε οι δυνατές αναλύσεις της σ σε γινόμενο ξένων κύκλων είναι οι εξής:

(1) $\sigma(1) = (1)\ (2)\ (3)\ (4) = i \longmapsto$ τάξη της σ είναι $o(\sigma) = 1$

(2) $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ όπου $o(\sigma_1) = o(\sigma_2) = 1$, $o(\sigma_3) = 2$

$\sigma = (1)(2)(34) \longmapsto o(\sigma) = 2$

(3) $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ όπου $o(\sigma_1) = 1$ και $o(\sigma_2) = 3$

$\sigma = (1) \circ (2,3,4) \longmapsto o(\sigma) = 3$

(4) $\sigma = \sigma_1 \sigma_2$, $o(\sigma_1) = o(\sigma_2) = 2$

$\sigma = (12) \circ (34) \longmapsto o(\sigma) = 2$

(5) $o(\sigma) = 4$

Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε η διαμέριση του n είναι μια k-άδα αριθμών: $[a_1, a_2, \dots, a_k]$ όπου $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$ και $\sum_{j=1}^{k} a_j = n$

Αν $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$ διαμέριση του n τότε ορίζεται η μετάθεση $\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k$ όπου $o(\sigma_i) = \alpha_i$, $1 \leq i \leq k$ αντίστροφα αν $\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k$ γινόμενο ξένων κύκλων τότε $[o(\sigma_1), o(\sigma_2), \ldots, o(\sigma_k)]$ διαμέριση του n

Διαμερίσεις 5:

(1) $[1, 1, 1, 1, 1]$

(2) $[1, 1, 1, 2]$

(3) $[1, 1, 3]$

(4) $[1, 2, 2]$

(5) $[1, 4]$

(6) $[2, 3]$

(7) $[5]$

Άρα έχουμε 7 κλάσεις συζυγίας στην S_5

(1) Μετάθεση σ: $(1)(2)(3)(4)(5)$
με $o(\sigma) = 1$

(2) σ: $(1)(2)(3)(4,5)$
$o(\sigma) = 2$

(4) σ: $(1)(23)(45)$
$o(\sigma) = 2$

(3.) σ: $(1)(2345)$
$o(\sigma) = 4$

(3): σ: $(1)(2)(345)$
$o(\sigma) = 3$

(6) $\sigma: (12)(345)$

$o(\sigma)=6$

(7) $\sigma=(12345)$ $o(\sigma)=5$

Υπαρχει στοιχειο ταξης 35 στην S_{12};

Απαντηση: Ναι, $\sigma_1=(12345)$

$\sigma_2=(6\,7\,8\,9\,10\,11\,12)$

$\sigma=\sigma_1\circ\sigma_2$

$o(\sigma)=[o(\sigma_1),o(\sigma_2)]$

$=[5,7]=35$

Αντιμεταθεσεις και Εναλλασσουσα ομαδα A_n

Καθε κυκλος μηκους 2 καλειται αντιμεταθεση

Γενική μορφή μιας αντιμεταθεσης: $(i\ j)$

Λημμα: Καθε κυκλος μπορεί να γραφεί ως γινόμενο

αντιμεταθεσεων $(S_n: n\geq 2)$

Αποδειξη: Έστω $\sigma=(a_1\,a_2\,\ldots\,a_{k-1}\,a_k)$ ένας κυκλος μηκους

k. Τότε • $k=1$, $\sigma=i=(12)(12)$

⋮

• $k\geq 2$ $\sigma=(a_1 a_2\ldots a_{k-1} a_k)=(a_1 a_k)(a_1 a_{k-1})\ldots(a_1 a_3)(a_1 a_2)$

Scanned by CamScanner

Πόρισμα: Κάθε μετάθεση είναι γινόμενο αντιμεταθέσεων

Απόδειξη: κάθε μετάθεση είναι γινόμενο ξένων κύκλων και κάθε κύκλος είναι γινόμενο αντιμεταθέσεων. Άρα κάθε μετάθεση είναι γινόμενο αντιμεταθέσεων.

Παράδειγμα: Στην S_5

$$\sigma = (1\,5\,2\,4\,3) = (1\,3)(1\,4)(1\,2)(1\,5$$

$$= (1\,5)\circ(5\,2)\circ(2\,4)\circ(4\,3)$$

$$= (1\,2)\circ(3\,4)\circ(2\,3)\circ(1\,2)\circ(2\,3)\circ(3\,4)\circ(4\,5)\circ(3\,4)\circ(2\,3)\circ(1\,2)$$

Έστω $\sigma \in S_n$ και $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$ όπου $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$: i-οστή γραμμή του A

Ορίζουμε έναν νέο $n \times n$-πίνακα ως εξής: $\sigma(A)$: έχει ως i-οστή γραμμή $\sigma(A)_i = A_{\sigma^{-1}(i)}$

$\sigma = (1\,3\,2) \in S_3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$\sigma^{-1} = (1\,2\,3)$

$\sigma^{-1}(1) = 2$
$\sigma^{-1}(2) = 3$
$\sigma^{-1}(3) = 1$

Τότε $\sigma(A) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Θεώρημα: Δεν υπάρχει μετάθεση σ η οποία να μπορεί να γραφεί ως γινόμενο αρτίου και περιττού πλήθους αντιμεταθέσεων

Απόδειξη: Έστω ότι η σ γράφεται ως γινόμενο αρτίου και περιττού πλήθους αντιμεταθέσεων.

$\sigma = \mu_1 \circ \mu_2 \circ \dots \circ \mu_{2k}$, όπου μ_i: αντιμετάθεση, $1 \le i \le 2k$

$= \nu_1 \circ \nu_2 \circ \dots \circ \nu_{2\lambda+1}$, όπου ν_i: αντιμετάθεση, $1 \le i \le 2\lambda+1$

Επιλέγω $A = I_n$. Τότε $\sigma(I_n) = \mu_1(\mu_2(\dots(\mu_{2k}(I_n))\dots))$

$= \sigma(I_n)|_i = I_n(\mu_{2k} \circ \dots \circ \mu_2 \circ \mu_1(i))$

Άρα $|\sigma(I_n)| = (-1)^{2k} = 1$

και $|\sigma(I_n)| = (-1)^{2\lambda+1} = -1$

Ορισμός: Μια μετάθεση σεSn καλείται άρτια αν η σ γράφεται ως γινόμενο άρτιου πλήθους αντιμεταθέσεων. Όμοια η σεSn καλείται περιττή αν η σ γράφεται ως γινόμενο περιττού πλήθους αντιμεταθέσεων.

Παράδειγμα: Έστω $\sigma = (i_1, i_2, \dots i_k)$ κύκλος μήκους k

$$\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k) = \underbrace{(i_1\ i_k) \circ (i_1\ i_{k-1}) \circ \dots \circ (i_1\ i_3) \circ (i_1\ i_2)}_{k-1 \text{ αντιμεταθέσεις}}$$

- Αν k: άρτιος ⇒ σ: περιττή
- Αν k: περιττός ⇒ σ: άρτια.

Παράδειγμα:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 7 & 4 & 5 & 3 & 10 & 1 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 2\ 7) \circ (3\ 4\ 5) \circ (6\ 10) \circ (8) \circ (9)$$

$$= (1\ 7) \circ (1\ 2) \circ (3\ 5) \circ (3\ 4) \circ (6\ 10) : 5\text{- αντιμεταθέσεις}$$

⇒ τ: περιττή.

Scanned by CamScanner

	άρτια	περιττή
άρτια	άρτια	περιττή
περιττή	περιττή	άρτια

Ορίζουμε $\varepsilon : S_n \to \{1, -1\}$

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma: \text{άρτια} \\ -1, & \sigma: \text{περιττή}. \end{cases}$$

Τότε $\varepsilon(\sigma)$: ομομορφισμός ομάδων.

Τότε ε επιμορφισμός

Άρα, $Ker(\varepsilon) := A_n = \{\sigma \in S_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} = \{$όλες οι άρτιες μεταθέσεις$\}$

Άρα από 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών

$$Ker(\varepsilon) = A_n \trianglelefteq S_n$$

και $S_n / A_n \cong (\{1, -1\}, \cdot)$ $\quad [S_n : A] = 2$

$$\Rightarrow A_n = \frac{n!}{2}$$

Από: Εναλλάσσουσα ομάδα.